

17 Raytracing

Stephan Winkler

17.1 Einführung

17.1.1 WAS IST RAYTRACING?

Das klassische Raytracing-Verfahren wurde 1980 von Whitted entwickelt. Es hat sich in den letzten 15 Jahren in der Computergrafik als Verfahren bewährt, eine durch endlich viele Flächen definierte Szene im dreidimensionalen Objektraum möglichst realistisch zweidimensional abzubilden.

17.1.2 FUNKTIONSWEISE DES RAYTRACING

17.1.2.1 Strahlverfolgung

Um die Grundidee des Raytracing zu erklären, empfiehlt es sich, zunächst den natürlichen Sehvorgang in Erinnerung zu rufen. In der Realität werden Lichtstrahlen von einer oder mehreren Lichtquellen ausgesandt und von den Objekten im Raum teils absorbiert, teils reflektiert und teils gebrochen. Nur die wenigsten dieser Lichtstrahlen fallen ins Auge des Beobachters und bilden die ihn umgebende Welt auf die Netzhaut ab.

Wie läßt sich nun dieser Vorgang auf den virtuellen Objektraum übertragen? Wir beginnen mit der Festlegung eines Blickfelds. Vergleichbar einem Fenster definieren wir einen rechteckigen Ausschnitt der Projektionsebene, die zwischen dem virtuellen Beobachter und der abzubildenden Szene liegt. Dieser Ausschnitt, den wir mit dem Computerbildschirm identifizieren, wird regelmäßig und hinreichend fein gerastert.

Aus Komplexitätsgründen muß von einer physikalisch korrekten Simulation des oben beschriebenen Sehvorgangs abgesehen werden. Wir wollen den Rechenaufwand in einem vertretbaren Rahmen zu halten, indem wir keine Lichtstrahlen untersuchen, die das Auge des Beobachters gar nicht erreichen. Daher wird der natürliche Sehvorgang umgekehrt: Man verfolgt den Weg derjenigen Lichtstrahlen (*engl. ray*), die durch die Mittelpunkte der Rasterquadrate ins Auge einfallen, im Objektraum zurück (*engl. to trace*). Die zurückverfolgten Lichtstrahlen werden im folgenden auch *Sehstrahlen* und, wenn sie direkt vom Beobachter ausgehen, *Primärstrahlen* genannt.

17.1.2.2 Berechnung der Schnittpunkte

Für jeden vom Beobachter aus zurückverfolgten Primärstrahl wird ein *Schnitttest* mit allen Szenenobjekten durchgeführt, um festzustellen, welches der nächstlie-

gende Schnittpunkt S ist.

17.1.2.3 Berechnung der Lichtintensität

Nunmehr ist die Lichtintensität L gesucht, die in S aus der Richtung des einfallenden Sehstrahls sichtbar ist.

Diese Intensität kann sich aus drei Anteilen zusammensetzen:

- dem selbstemittierten Licht,
- dem direkt von den Lichtquellen kommenden Licht, das in S reflektiert bzw. transmittiert wird, sowie
- dem globalen Licht, das durch Mehrfachreflektion und Mehrfachtransmission an anderen Flächen aus dem gesamten Szenenraum kommt und in S reflektiert bzw. transmittiert wird.

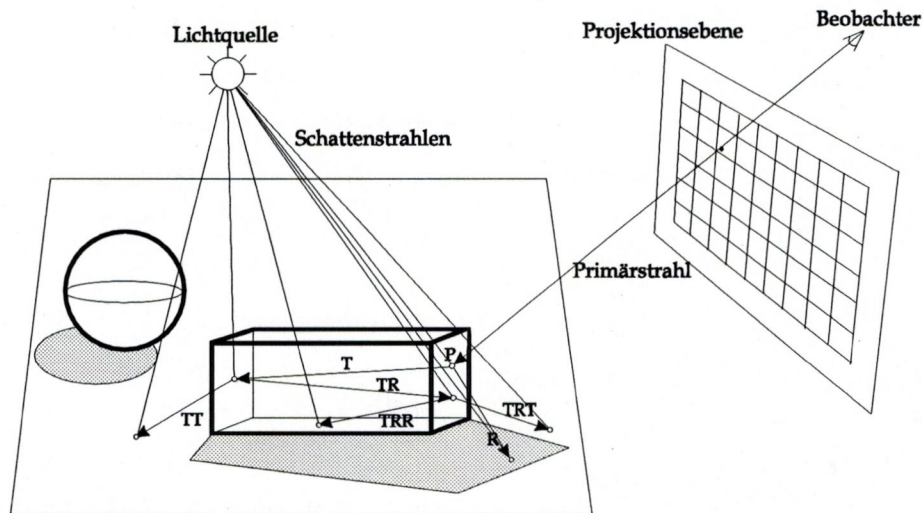


Abbildung 17.1. Strahlverfolgung eines Primärstrahls und seiner Sekundärstrahlen

Zur Berechnung dieser drei Intensitätskomponenten ist es erforderlich, Sekundärstrahlen vom Schnittpunkt aus rekursiv durch die Szene zu verfolgen.

Um eine realistische Wirkung hervorzurufen, muß z.B. berücksichtigt werden, daß Szenenobjekte im Schatten liegen können, sofern sich andere zwischen ihnen und den Lichtquellen befinden. Es müssen also Schattenstrahlen in Richtung der Lichtquellen entsandt werden, um nach schattenwerfenden Szenenobjekten zu suchen. Falls keine gefunden werden, wird die volle Leuchtstärke der Lichtquelle berechnet. Andernfalls muß sie entsprechend der Lichtdurchlässigkeit der blockierenden Szenenobjekte vermindert werden. Bei transparenten Objekten fällt die Verdunklung weniger stark ins Gewicht als bei opaken Objekten.

Will man Spiegel- und Transparenzeffekte realisieren, so muß ferner ein reflektierter und ein transmittierter Strahl in die ideal reflektierte bzw. gebrochene Strahlrichtung verfolgt werden.

Schließlich wird approximativ über die indirekte Lichtintensität integriert, indem man hinreichend viele diffus gestreute Strahlen in den Objektraum entsenden und die von ihnen ermittelten indirekten Lichtintensitäten mittelt.

Abbildung 17.1 veranschaulicht den gesamten Raytracingvorgang am Beispiel eines einzelnen Primärstrahls, der durch eine einfache Szene verfolgt wird.

17.1.3 SCHWIERIGKEIT DES RAYTRACING

Das Hauptproblem des Raytracing-Verfahrens war von Anfang an die immens hohe Komplexität des Verfahrens. Die Berechnungen sind nicht nur aufwendig, ihre Zahl wächst auch exponentiell mit zunehmender Rekursionstiefe. Einen Großteil der Rechenzeit nimmt dabei die Ermittlung der gültigen Schnittpunkte der Sehstrahlen mit den einzelnen Szenenobjekten in Anspruch. Infolgedessen hatte die Raytracing-Forschung in den achtziger Jahren drei Schwerpunkte:

- Erstens wurden verschiedene Beschleunigungsdatenstrukturen entwickelt, die die Anzahl der Schnittpunkttests zwischen Strahlen und Flächen deutlich reduzieren.
- Zweitens wurden für zahlreiche geometrische Primitive schnelle Schnittberechnungsalgorithmen vorgeschlagen.
- Drittens wurden Strategien zur Parallelisierung und Hardwareunterstützung der Strahlverfolgung und Schnittpunktberechnung entworfen.

In den neunziger Jahren hat sich die Gewichtung der Forschungsaktivitäten deutlich verlagert. Das vorrangige Ziel besteht jetzt darin, den Photorealismus der berechneten Bilder durch bessere Lichtreflektions- und Beleuchtungsalgorithmen zu erhöhen.

17.2 Fähigkeiten eines modernen Raytracingsystems

17.2.1 FLÄCHEN UND FESTKÖRPER

Alle vom Raytracingsystem LWRay unterstützten Szenenobjekte sind aus Flächen aufgebaut, deren Schnitt mit einem Strahl die Ausdehnung Null in Strahlrichtung hat.

Geschlossene Flächen werden als *Festkörper* (*solid objects*) bezeichnet. Sie erlauben es, für jeden Punkt des Raumes anzugeben, ob er auf der Hüllfläche des Festkörpers, in seinem Inneren oder in seinem Äußeren liegt. Mit anderen Worten, Festkörper sind Punktengen $F \subset \mathbb{R}^3$, die den Komplementärraum $\mathbb{R}^3 \setminus F$ in unzusammenhängende Teilräume aufteilen. Dies impliziert, daß man stets angeben kann, ob ein Strahl einen Festkörper in einem beliebigen Schnittpunkt betritt oder verläßt. Eine Information, die z.B. für die korrekte Berechnung der Lichtbrechung von Bedeutung ist.

Die folgende Liste gibt einen Überblick über die von LWRay bereitgestellten Szenenobjekte:

- *Planare Flächen bzw. Flächen erster Ordnung*: Kreise, Dreiecke, Quadrate, Rechtecke sowie Parallelogramme.
- *Quadriken bzw. Flächen zweiter Ordnung*: ein- und zweischalige Hyperboloide, Kegel, elliptische und hyperbolische Paraboloiden sowie elliptische, hyperbolische und parabolische Zylinder. Kugeln und Ellipsoide sind als konvexe Festkörper klassifiziert.
- *Beliebige Flächen*, die durch Dreiecksgitternetze approximiert werden: Schaubilder von Funktionen zweier Variabler, parametrische Flächen sowie fraktale Gebirge.
- *Flächenverbunde*, im besonderen planare Fraktale wie Sierpinski-Dreiecke, Pythagoras-Bäume, ...
- *Festkörper*
 - *Konvexe Festkörper*: Kugeln, Ellipsoide sowie konvexe reguläre Polyeder (Platonische Körper).
 - *CSG-Festkörper*: Constructive Solid Geometry (CSG)- Festkörper entstehen bei der Verknüpfung zweier Festkörper durch eine boolesche Mengenoperation. Bei der Modellierung beschränkt man sich gewöhnlich auf die besonders anschaulichen Verknüpfungen *Vereinigung*, *Schnitt* und *Differenz*.
 - *Festkörperverbunde*, im besonderen räumliche Fraktale wie Sierpinski-Tetraeder, räumliche Pythagoras-Bäume, ...

17.2.2 ELEMENTARE UND ZUSAMMENGESetzte SZENENOBJEKTE

Grundsätzlich lassen sich alle Szenenobjekte in elementare und zusammengesetzte aufteilen. Letztere werden auch Verbundobjekte genannt.

Als *elementar* bezeichnen wir solche Szenenobjekte, die in der Lage sind, ihre Schnittpunkte mit einem beliebigen Strahl mittels eines internen Algorithmus selbst zu berechnen. Als elementare Szenenobjekte sind bisher lediglich planare Flächen und Quadriken implementiert. Realisierbar sind – wenngleich mit viel höherem Aufwand verbunden – auch Tori, Rotations- und Translationskörper.

Alle anderen Szenenobjekte sind *Verbundobjekte*. Sie beinhalten eine Liste von (elementaren oder anderen zusammengesetzten) Szenenobjekten, welche sie zu einer Einheit, quasi einem neuen Szenenobjekt zusammenfassen. Verbundobjekte delegieren die Schnittpunktberechnung an ihre Teilobjekte und verfügen über keine internen Berechnungsalgorithmen.

Als besondere Verbundobjekte sind zu unterscheiden:

- Beschleunigungsobjekte: sie führen mit den aufgelisteten Teilobjekten nicht einfach nacheinander Schnitttests durch, sondern setzen zuvor Verfahren ein, um die Zahl der notwendigen Schnitttests zu minimieren.
- CSG-Objekte: sie führen mit den beiden gespeicherten Teilfestkörpern Schnitttests durch und verknüpfen die Ergebnisse durch eine boolesche Mengenoperation (Abschnitt 17.2.1).
- Gitternetzobjekte: sie sind auf die Verwaltung und Verarbeitung von Dreiecksgitternetzen, also Verbunden zahlreicher Dreiecke, spezialisiert.

17.2.3 GESTALTUNG DER SZENENOBJEKTE

Für die Ausgestaltung der Szenenobjekte bestehen folgende Möglichkeiten:

- Für die Beleuchtungsrechnung stehen das einfache Verfahren der diffusen Reflexion sowie verschieden komplizierte Ausführungen des bekannten Phong-Beleuchtungsmodells zur Verfügung.
- Die Oberflächenbeschaffenheit kann durch verschiedene Parameter festgelegt werden. Sie bestimmen unter anderem, wie stark eine Fläche spiegelt, wie transparent sie ist, wie glänzend sie wirkt und wie stark sie das Licht bricht. Alle diese Effekte lassen sich beliebig kombinieren.
- Für die Farbgebung können einzelne Farben, Schachbrettmuster, Fraktale sowie beliebige Bitmap-Texturen verwendet werden.

17.2.4 LICHTQUELLEN

Lichtquellen können in beliebiger Anzahl durch ihre Position, ihre Farbe und die Intensität des von ihnen ausgestrahlten Lichts festgelegt werden. Die Berechnung der von ihnen erzeugten Schatten erfolgt automatisch. Bisher sind lediglich unsichtbare punktförmige Lichtquellen implementiert; geplant sind jedoch auch flächige bzw. räumliche Lichtquellen, die ihrerseits sichtbar sind.

17.3 Schnittberechnung

17.3.1 EINFÜHRUNG

Eine der Grundproblematiken des Raytracing ist es, die gültigen Schnittpunkte eines Sehstrahls mit einem Szenenobjekt zu ermitteln. Wir haben bereits auf die Unterschiede in der Schnittberechnung hingewiesen, die zwischen elementaren und zusammengesetzten Szenenobjekten bestehen. Da Verbundobjekte bei der Schnittberechnung auf die Methoden ihrer Teilobjekte zurückgreifen, besprechen wir im folgenden lediglich die – aus mathematischer Sicht – interessan-

ten Schnittverfahren für elementare Szenenobjekte. Für ihre Herleitung werden Grundkenntnisse aus der analytischen Geometrie des Raumes benötigt.

Es gilt, sowohl Sehstrahl als auch Szenenobjekt durch einen mathematischen Ausdruck als Punktmengen zu beschreiben, deren gesuchte Schnittmenge sich durch Gleichsetzen ergibt. Ein Sehstrahl entspricht in geometrischer Hinsicht einer Geraden und wird durch einen Punkt E mit dem Ortsvektor \vec{e} , den Ausgangspunkt des Sehstrahls, sowie einen normierten Richtungsvektor \vec{r} eindeutig festgelegt. Ein Sehstrahl besteht somit aus den Punkten P mit den Ortsvektoren $\vec{p} = \vec{e} + \lambda \cdot \vec{r}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Diese Darstellung bezeichnet man für gewöhnlich als parametrische Strahlgleichung.

17.3.2 SCHNITT MIT PLANAREN FLÄCHEN

Da jede der implementierten planaren Flächen (Kreis, Dreieck, Quadrat, Rechteck, Parallelogramm) in eine Trägerebene eingebettet ist, liegt der Schnittberechnung mit planaren Flächen das Problem zugrunde, einen Sehstrahl S mit einer Ebene E zu schneiden. Dabei kann es offensichtlich keinen, einen oder unendlich viele Schnittpunkte geben. Existiert ein Schnittpunkt, so wird er in einem zweiten Berechnungsschritt darauf hin überprüft, ob er gültig ist, sprich ob er in dem Bereich der Trägerebene liegt, den auch die planare Fläche einnimmt. Während wir dies bei Kreisen sofort entscheiden können, müssen bei Drei- und Vierecken die Linearfaktoren des Schnittpunkts in der Trägerebene bekannt sein.

17.3.2.1 Schnitt mit Trägerebene

Die Trägerebene E wird durch den Stützvektor \vec{t} und die Spannvektoren \vec{u} und \vec{v} bestimmt. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die Normalenform der Ebenengleichung für spätere Berechnungen besser geeignet ist als die Parameterform. Die Umformung ist einfach: Mit Hilfe des Vektorprodukts erhält man einen zur Ebene orthogonalen Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ und somit die Normalenform $(\vec{p} - \vec{t}) \bullet \vec{n} = 0$. Interpretieren wir \vec{p} als Ortsvektor des gesuchten Schnittpunkts, der ja auf dem Sehstrahl S liegt, so können wir in der Ebenengleichung die Substitution $\vec{p} = \vec{e} + \lambda \cdot \vec{r}$ vornehmen. Wir erhalten

$$(\vec{e} + \lambda \cdot \vec{r} - \vec{t}) \bullet \vec{n} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich durch Substitution mit $\vec{w} = \vec{e} - \vec{t}$ vereinfachen. Aufgelöst nach λ erhält man den Abstand des Schnittpunkts vom Stützvektor des Sehstrahls.

$$\begin{aligned} 0 &= (w_x + \lambda \cdot r_x) \cdot n_x + (w_y + \lambda \cdot r_y) \cdot n_y + (w_z + \lambda \cdot r_z) \cdot n_z \\ \lambda &= \frac{-n_x \cdot w_x - n_y \cdot w_y - n_z \cdot w_z}{n_x \cdot r_x + n_y \cdot r_y + n_z \cdot r_z} \\ \lambda &= \frac{-\vec{n} \bullet \vec{w}}{\vec{n} \bullet \vec{r}} \end{aligned}$$

Im Fall $\vec{n} \bullet \vec{r} = 0$ sind \vec{n} und \vec{r} orthogonal und folglich ist \vec{r} parallel zur Ebene. Ist der Zähler ungleich Null, so existiert kein Schnittpunkt. Verschwindet hingegen auch der Zähler, so verläuft der Sehstrahl in der Ebene. Dann ist die Ebene aufgrund ihrer Zweidimensionalität aber genausowenig zu sehen. Deshalb nehmen wir zweckmäßigerweise auch in diesem Fall eine leere Schnittmenge an.

Ist obiger Ausdruck für λ jedoch definiert, so existiert ein einziger Schnittpunkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p} = \vec{e} + \lambda \cdot \vec{r}$. Negative Werte für λ können vernachlässigt werden, da dann der Schnittpunkt hinter dem Ausgangspunkt des Strahls liegt, bei Primärstrahlen etwa hinter dem Beobachter.

17.3.2.2 Flächenbereichsprüfung bei Kreisen

Bei einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r läßt sich leicht verifizieren, ob der berechnete Schnittpunkt S mit der Trägerebene innerhalb der Kreisscheibe liegt. Bezeichnen wir die Ortsvektoren von M und S mit \vec{m} bzw. \vec{s} , so muß lediglich die Gültigkeit folgender Bedingung nachgewiesen werden:

$$\|\vec{s} - \vec{m}\| \leq r.$$

17.3.2.3 Flächenbereichsprüfung bei Drei- und Vierecken

Die Trägerebene von Dreiecken, Quadraten, Rechtecken und Parallelogrammen wird wie folgt bestimmt: als Stützvektor dient eine beliebige Ecke (auch *Basisecke* genannt), als Spannvektoren wählt man die Differenzvektoren zwischen den Nachbarecken und der Basisecke.

Innerhalb der Dreiecksgrenzen liegt ein Schnittpunkt P mit der Trägerebene genau dann, wenn er, ausgehend vom Stützvektor, durch Linearkombination der Spannvektoren \vec{u} und \vec{v} zu erreichen ist, wobei

1. \vec{u} und \vec{v} jeweils nur mit einem Faktor ϑ bzw. $\varphi \in [0; 1] \subset \mathbb{R}$ multipliziert werden dürfen und
2. $\vartheta + \varphi \leq 1$ gilt.

Bei Quadraten, Rechtecken und Parallelogrammen entfällt die zweite Einschränkung.

Wenden wir uns nun der Berechnung der Linearfaktoren ϑ und φ zu. Hierzu setzen wir P in die Ebenengleichung in Parameterform ein und lösen zwei geeignete der drei Gleichungen nach den beiden Faktoren auf.

$$\begin{aligned} p_x &= t_x + \vartheta \cdot u_x + \varphi \cdot v_x \\ p_y &= t_y + \vartheta \cdot u_y + \varphi \cdot v_y \\ p_z &= t_z + \vartheta \cdot u_z + \varphi \cdot v_z \end{aligned}$$

Sinnvoll zur Auflösung ist nur jeweils die Gleichung, in welcher der interessierende Faktor nicht mit Null multipliziert wird. Für den Fall $u_x \neq 0, v_y \neq 0$ könnte man

z.B. so auflösen:

$$\vartheta = \frac{p_x - t_x - \varphi \cdot v_x}{u_x} \quad (17.1)$$

$$\varphi = \frac{p_y - t_y - \vartheta \cdot u_y}{v_y} \quad (17.2)$$

Durch Einsetzen von 17.1 in 17.2 folgt schließlich

$$\varphi = \frac{u_x(p_y - t_y) - u_y(p_x - t_x)}{u_x v_y + u_y v_x}$$

Um eine geeignete Lösungsmöglichkeit auszuwählen, werden in einer kurzen Prozedur alle sechs möglichen Paare $(u_i, v_j)_{i \neq j}$ überprüft, bis ein geeignetes gefunden ist.

17.3.3 SCHNITT MIT QUADRIKEN

17.3.3.1 Definition und Notation von Quadriken

Als Quadrik oder Fläche zweiter Ordnung bezeichnen wir die Gesamtheit aller Punkte, welche einer Gleichung der Form

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &:= ax^2 + ey^2 + hz^2 \\ &+ 2bxy + 2cxz + 2fyz \\ &+ 2dx + 2gy + 2iz + j = 0 \end{aligned} \quad (17.3)$$

genügen. Dies kann in kompakter Form wie folgt ausgedrückt werden. Wir bezeichnen mit Q die lineare Transformation mit der symmetrischen 4×4 -Matrix

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{p} = (x, y, z, 1)$ gilt

$$Q(\vec{p}) = \mathbf{M}\vec{p} = \begin{pmatrix} ax + by + cz + d \\ bx + ey + fz + g \\ cx + fy + hz + i \\ dx + gy + iz + j \end{pmatrix}$$

Indem wir nun \vec{p} skalar mit $\mathbf{M}\vec{p}$ multiplizieren und anschließend gleich Null setzen, erhalten wir Gleichung 17.3. Daher notieren wir als allgemeine implizite Gleichung einer Quadrik Q kurz:

$$Q : \vec{p} \bullet \mathbf{M}\vec{p} = 0. \quad (17.4)$$

Hinweis: Bisher haben wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt M der Quadrik angenommen. Es entsteht durch Translation des Objektraumkoordinatensystems um den Vektor \vec{m} . Wir gleichen dies dadurch aus, daß wir den Ausgangspunkt E unseres Sehstrahls S entgegengesetzt verschieben. Er hat dann den Ortsvektor $\vec{e}' = \vec{e} - \vec{m}$.

17.3.3.2 Allgemeiner Ansatz zur Schnittberechnung

Durch Einsetzen der Strahlgleichung $S : \vec{p} = \vec{e}' + \lambda \cdot \vec{r}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) in Gleichung 17.4 ergibt sich:

$$(\vec{e}' + \lambda \cdot \vec{r}) \bullet M(\vec{e}' + \lambda \cdot \vec{r})$$

Ausmultiplizieren und geeignetes Zusammenfassen führt auf die quadratische Gleichung

$$u\lambda^2 + v\lambda + w = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} u &= \vec{r} \bullet M\vec{r} \\ v &= 2(\vec{r} \bullet M\vec{e}') \\ w &= \vec{e}' \bullet M\vec{e}' \end{aligned}$$

Ist $u \neq 0$, so muß die Diskriminante der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen überprüft werden. Falls $v^2 - 4uw < 0$ ist, findet kein Schnitt statt. Ansonsten berechnen wir $\lambda_{1,2}$ zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u}$$

und wählen die kleinste positive Lösung als gesuchten Abstand des Schnittpunkts vom Ausgangspunkt des Sehstrahls.

Ist $u = 0$, so erhalten wir ($v \neq 0$ vorausgesetzt) als einzige Lösung einfach

$$\lambda = -\frac{w}{v}$$

17.3.3.3 Berechnung der Flächennormalen

Besonders für die Beleuchtungsrechnung wird die Normale \vec{n} zur Quadrikfläche im Schnittpunkt P benötigt. Während sie bei allen planaren Flächen konstant ist, so variiert sie bei Quadriken offensichtlich in Abhängigkeit von P . Wir erhalten die Komponenten von \vec{n} , indem wir die partiellen Ableitungen der Funktion F aus (17.3) nach x , y und z in P berechnen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(p_x, p_y, p_z)}{\partial x} \\ \frac{\partial F(p_x, p_y, p_z)}{\partial y} \\ \frac{\partial F(p_x, p_y, p_z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(ap_x + bp_y + cp_z + d) \\ 2(bp_x + ep_y + fp_z + g) \\ 2(cp_x + fp_y + hp_z + i) \end{pmatrix}$$



Abbildung 17.2. Ellipsoid, einschaliges und zweischaliges Hyperboloid

Es ist empfehlenswert, \vec{n} zu normalisieren: $\vec{n}_e = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. Auch sollte die Normale von der Fläche aus dem Strahl entgegengerichtet sein. Wenn $\vec{n}_e \bullet \vec{r} > 0$ gilt, so muß \vec{n}_e umgekehrt werden: $\vec{n}'_e = -\vec{n}_e$.

17.3.3.4 Klassifikation der Quadriken

Durch den in Abschnitt 17.3.3.2 beschriebenen, allgemeinen Ansatz ist es uns nun möglich, mit jeder beliebigen Fläche zweiter Ordnung, deren charakteristische Matrix \mathbf{M} wir kennen, einen Schnitttest durchzuführen. Die Matrix \mathbf{M} ergibt sich unmittelbar aus der Quadrikenleichung.

Bezüglich ihrer Gestalt können Quadriken wie in Tabelle 17.1 klassifiziert werden.

Die Abbildungen 17.2 und 17.3 stellen Beispiele für einige der weniger bekannten Quadriken dar. Aus Effektivitätsgründen wird man für die oben aufgelisteten Quadrikenleichungen in Normalform spezielle, einfachere Formeln herleiten. Wir verzichten im Rahmen dieses Artikels auf eine vollständige Darstellung und betrachten im folgenden Abschnitt 17.3.3.5 als Beispiel lediglich die Kugel.

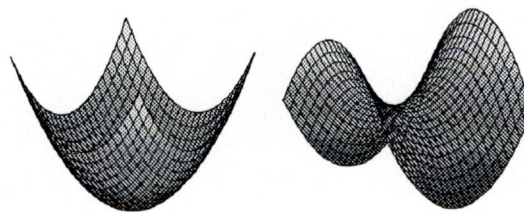


Abbildung 17.3. Elliptisches und hyperbolisches Paraboloid

17.3.3.5 Die Kugel als Spezialfall des Ellipsoids

Eine Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r ist definiert als Menge derjenigen Punkte, die von M den Abstand r haben:

$$K := \{\vec{p} \mid \|\vec{p} - \vec{m}\| = r\}$$

Wegen $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}^2}$ muß also $(\vec{p} - \vec{m})^2 = r^2$ gelten. Wir setzen für \vec{p} den Strahlendruck ein, substituieren $\vec{e}' = \vec{e} - \vec{m}$ und fassen geeignet zusammen. Wir erhalten die quadratische Gleichung

$$(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \cdot \lambda^2 + (e'_x r_x + e'_y r_y + e'_z r_z) \cdot \lambda + (e'_x{}^2 + e'_y{}^2 + e'_z{}^2 - r^2) = 0,$$

die nur noch nach λ aufgelöst zu werden braucht.

17.4 Beleuchtungsmodelle

17.4.1 EINFÜHRUNG

Die Problematik, zu einem gegebenen Flächenschnittpunkt die in Richtung des Sehstrahls sichtbare Lichtintensität zu berechnen, wurde bereits in der Einleitung skizziert. Sie kann mit ganz unterschiedlichem Aufwand und in dementsprechend unterschiedlicher Qualität gelöst werden. Als Beispiele seien die diffuse und die spiegelnde Reflexion sowie das Phongshading-Modell genannt. Letzteres ist gut erweiterbar und kann äußerst realistisch wirken. Es ist hingegen sehr rechenintensiv und zu kompliziert, um im Rahmen dieses Artikels vorgestellt zu werden.

17.4.2 DAS MODELL DER DIFFUSEN REFLEXION

Wir wollen daher exemplarisch das relativ einfache Beleuchtungsmodell der *diffusen Reflexion* erläutern. Es kann gut auf matte, stumpfe Flächen wie z.B. Kreide oder allgemein auf planare Flächen angewendet werden, erlaubt jedoch weder Spiegel- noch Transparenzeffekte. Der Berechnungsformel liegt die Tatsache zugrunde, daß die diffus reflektierte Lichtintensität I , die auch der Beobachter wahrnimmt, proportional zum Kosinus des Winkels ψ zwischen dem auf die Lichtquelle gerichteten Vektor und dem Normalenvektor der Fläche ist.

Wir gehen von n Lichtquellen mit den Leuchtstärken $S_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ aus. Sie sollen Licht der Farbe F_i emittieren. Es ist uns die Flächennormale \vec{n} ebenso wie die Oberflächenfarbe O im Schnittpunkt bekannt. Die auf die Lichtquellen gerichteten Vektoren \vec{l}_i müssen ebenso wie \vec{n} normiert sein. Dann können wir für den Kosinus des Winkels ψ_i zwischen \vec{l}_i und \vec{n} nämlich auch $\vec{l}_i \bullet \vec{n}$ schreiben. Um die Stärke der Reflexion regulierbar zu machen, führen wir noch einen Koeffizienten $\kappa \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ als Materialparameter der Fläche ein. Somit berechnet sich I für jede Grundfarbkomponente *rot*, *grün* und *blau* wie folgt:

$$I = O \cdot \kappa \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F_i \cdot \vec{l}_i \bullet \vec{n})$$

17.5 LITERATUR

- [1] R. Endl: *Octree-Strahlgeneratoren*, Würfel, Dissertation, Biebental, 1995.
- [2] J. Foley, A. van Dam, et al.: *Grundlagen der Computergraphik*, Addison-Wesley-Verlag.
- [3] A. S. Glassner, et al.: *An introduction to ray tracing*, Academic Press, London, 1991.
- [4] A. Gröne: *Entwurf eines objektorientierten Visualisierungssystems auf der Basis von Raytracing*, Dissertation, Universität Tübingen, 1996.
- [5] T. Häselmann: *Raytracing*, Addison-Wesley-Verlag.
- [6] J. J. van Wijk: *On new types of solid models and their visualization with ray tracing*, Dissertation, Delft University Press, 1986.

Tabelle 17.1. Klassifikation der Quadriken

Quadrik	Quadrikgleichung	Matrix M
Ellipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$
Hyperboloid		
1. einschaliges \sim	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$
2. zweischaliges \sim	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$
Kegel	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Paraboloid		
1. elliptisches \sim	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$
2. hyperbolisches \sim	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$
Zylinder		
1. elliptischer \sim	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$
2. hyperbolischer \sim	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$
3. parabolischer \sim	$y^2 - 2px = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$