Bilder für Julia-Mengen am Beispiel der Funktion f(z) = z² + c

Die Bilder gehören zu Julia-Mengen für die Funktion:

$$\boldsymbol{f(z) = z^2 + c, z\ und\ c \in \mathbb{C}, c\ konstant}$$

Betrachtet wird die Iteration:

$$\boldsymbol{z_0 \in \mathbb{C},\ z_{k+1} = f(z_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Definitionen:
(1) Die **ausgefüllte Julia-Menge K(f,c)** ist in die Menge aller $z_0 \in \mathbb{C}$, bei denen die obige Folge beschränkt ist.
(2) Die **Julia-Menge J(f,c)** ist der Rand von K(f,c).
(3) Die **Fatou-Menge F(f,c)** ist $\mathbb{C}$ \ J(f,c).

Für die Fatou-Menge gilt

$$\boldsymbol{F(f,c) = F_u \cup F_b}, \text{ wobei}$$

$$\boldsymbol{F_u = \{ z_0 \in F(f,c) : Folge\ z_k \text{ ist unbeschränkt} \}}$$

$$\boldsymbol{F_b = \{ z_0 \in F(f,c) : Folge\ z_k \text{ ist beschränkt} \}}$$

Es gilt stets:

$$F_u \neq \emptyset.$$

Für die Menge F_b gibt es die folgenden Fälle:
(1a) $F_b = \emptyset$: J(f,c) ist zusammenhängend.
(1b) $F_b = \emptyset$: J(f,c) ist nicht zusammenhängend (Fatou-Dust).
(2a) $F_b \neq \emptyset$: Die Folge z_k mit $z_0 = 0 \in F_b$ konvergiert gegen einen endlichen Zyklus, d. h. sie kommt den einzelnen Punkten des Zyklus immer wieder beliebig nahe.
(2b) $F_b \neq \emptyset$: Es gibt keinen endlichen Zyklus, gegen den die Folge z_k mit $z_0 = 0$ konvergiert.

Anmerkungen (Beziehungen zur Mandelbrot-Menge (Bild 8)):
Im Fall 1a liegt c im Rand der Mandelbrot-Menge auf einer der „Antennen“.
Im Fall 1b liegt c nicht in der Mandelbrot-Menge.
Im Fall 2a liegt c im Inneren der Mandelbrot-Menge.
Im Fall 2b liegt c auf dem Rand der Mandelbrot-Menge und nicht auf einer der „Antennen“.

Im Fall 2b kann man noch zwei Alternativen unterscheiden:
(2b1) Es gibt einen Fixpunkt z^* von f mit $|f'(z^*)| = 1$, der in J(f,c) liegt. Dieser Fall wird in der Literatur als *parabolic case* bezeichnet. Beziehung zur Mandelbrotmenge M: c ist ein Punkt von M, bei dem „eine Knospe sprießt“.
(2b2) Es gibt einen Fixpunkt z^* von f mit $|f'(z^*)| = 1$, der in F_b liegt. Dieser Fall wird in der Literatur als *Siegel disk* bezeichnet. Ist $f'(z^*) = e^{2\pi i\alpha}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und z_0 aus der

Komponente von F_b , die z^* enthält, dann bewegt sich die Folge z_k auf einem invarianten Zyklus um z^* . Dabei entspricht eine Iteration eine Drehung um den Winkel α. Liegt der Punkt z_0 nicht in der genannten Komponente, dann gelangt die Iteration nach endlich vielen Schritten in diese Komponente. Beziehung zur Mandelbrotmenge M: c ist ein anderer Punkt auf dem Rand von M. (Dabei gibt es noch einige technische Bedingungen.)

Hinweise zur der Farbgebung der Bilder:
(1) Färbung von F_u : Den Startpunkten z_0 werden die Anzahl der Iterationsschritte k(z_0) zugeordnet, nach denen erstmalig $|z_k| \geq 10$ gilt. Abhängig von k(z_0) werden Farben in einer ersten Farbtabelle festgelegt.
(2a) Färbung von F_b : Es wird zunächst, ausgehend von 0 eine gewisse Anzahl Iterationen durchgeführt. Das Ergebnis sei der Punkt a. Es wird eine kleine Konstante $\varepsilon > 0$ gewählt. Den Startpunkten z_0 werden die Anzahl der Iterationsschritte k(z_0) zugeordnet, nach denen erstmalig $|z_k - a| \leq \varepsilon$ gilt. Abhängig von k(z_0) werden Farben in einer zweiten Farbtabelle festgelegt.
(2b1) Im *parabolic case* konvergiert die mit 0 gestartete Folge nicht gegen einen endlichen Zyklus. In diesem Falle kann man die Menge F_b schwarz färben.
(2b2) Im Falle der *Siegel disk* werden die Zyklen um den Fixpunkt z^* und ihre Urbilder jeweils mit der identischen Farbe gefärbt.

Die Bilder wurden jeweils mit 256 Farben gefärbt. Wenn keines der Konvergenzkriterien nach einer festen Maximalzahl Iterationen zutrifft, denn wird der jeweilige Punkt z_0 schwarz gefärbt.

Die Bilder wurden auf einem Notebook errechnet. Verwendet wurde die Programmiersprache Python mit der Graphik-Bibliothek PIL.

Für die Bilder verwendete Konstanten:
Bild 1: c = 0.32 + 0.043i (Fall 2a)
Bild 2: c = -0.3905407802 – 0.5867879073i (Fall 2b2, Siegel disk, α = $(\sqrt{5} - 1)/2$ = Konstante für den Goldenen Schnitt.)
Bild 3: c = -0.12 + 0.74i (Fall 2a)
Bild 4: c = -0.11 + 0.6557i (Fall 2a)
Bild 5: c = -0.481762 – 0.531657i (Fall 2b1, parabolic case)
Bild 6: c = -0.22816 + 1.11514i (Fall 1a)
Bild 7: c = -0.74543 + 0.11301i (Fall 1b, Fatou dust)

Als achtes Bild ist die Mandelbrot-Menge (Apfelmännchen) dargestellt.

Literatur:
(1) https://de.wikipedia.org/wiki/Julia-Menge
(2) https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge
(3) Peitgen, Richter: The Beauty of Fractals, Springer 1986

Dr. Walter Brübach - E-Mail: Walter.Bruebach@t-online.de